Лекция 8 Исследование функции и построение графика.

Тлеулесова А.М.

1) Локальный экстремум функции. Возрастание и убывание функции.

2) Глобальный экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной

функции на отрезке.

3) Точки перегиба функции. Исследование функции на выпуклость.

4) Асимптоты.

5) Схема построения графика функции.

МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ (ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ)

Теорема 1 (необходимые условия)

Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y=f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$ для $\forall\ x\in(a,b)$.

Теорема 2 (достаточные условия). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b) и $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ для $\forall x\in(a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале (a,b).

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует $\delta -$ окрестность точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$

Аналогично в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум, если существует $\delta -$ окрестность этой точки, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Значение функции в точке максимума (минимума) называют ***максимумом (минимумом)*** функции.

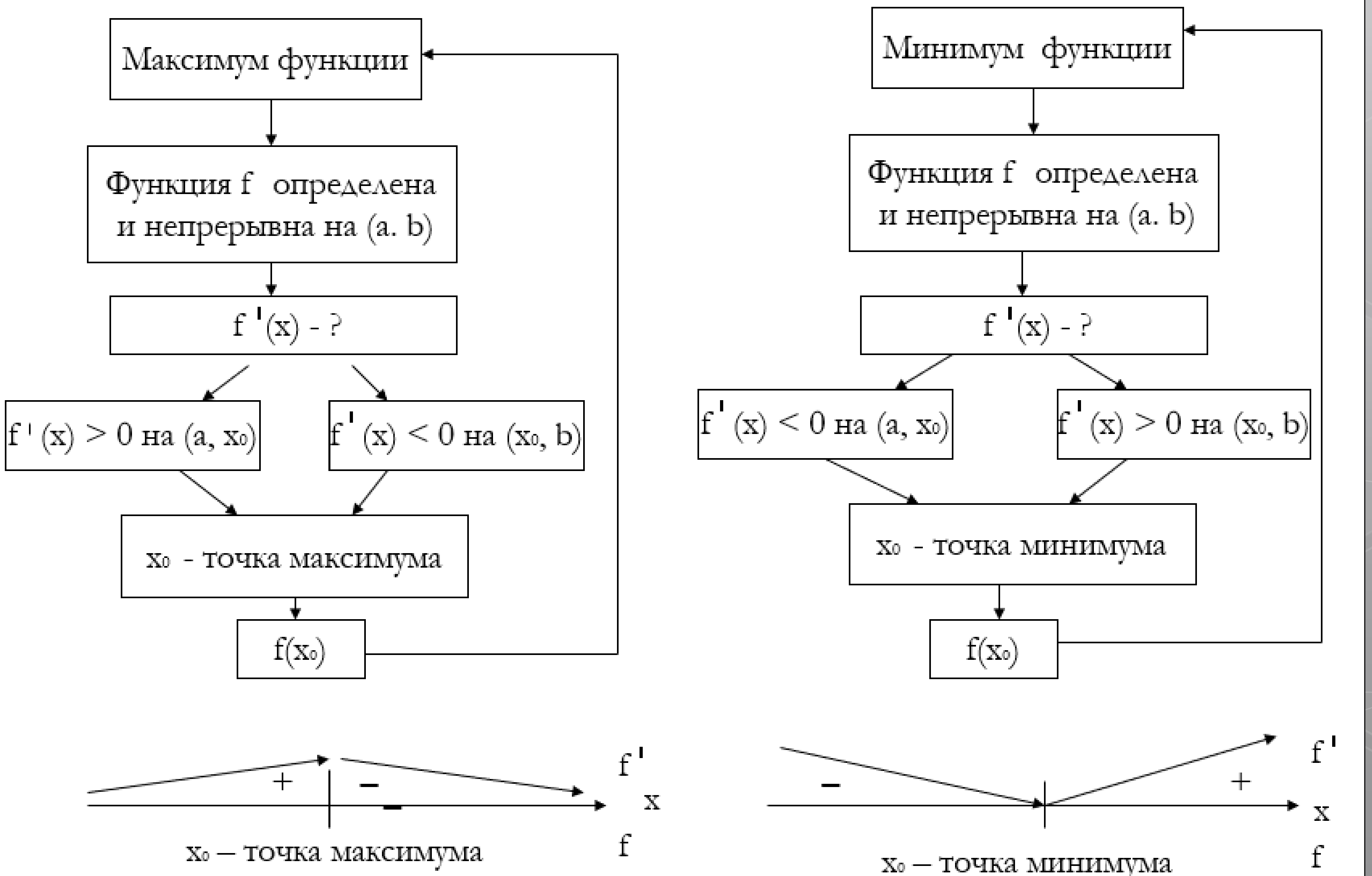
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Максимумом и минимум*** функции называют ***экстремумами функции***.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** функции.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и при переходе аргумента x через нее слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Точки экстремума и значение функции в этих точках



Теорема 5. Пусть в точке x_0 первая производная функции равна нулю $f'(x_0)=0$, а вторая производная существует и отлична от нуля $f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум и если $f''(x_0)>0$ – в точке x_0 функция имеет минимум.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Как известно, такая функция на этом отрезке достигает наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке отрезка $[a, b]$, либо на границе отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ необходимо:

1) найти критические точки функции в интервале (a, b);

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть при $x = a$ и $x = b$;

4) из всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ.
ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым (или вогнутым вверх)*** в интервале (a, b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. График функции $y = f(x)$ называется ***вогнутым (или выпуклым вниз)*** в интервале (a, b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой части, называется ***точкой перегиба***. В интервале (a, c) кривая $y = f(x)$ выпукла, в интервале (c, b) – вогнута; точка $M(c, f(c))$ – точка перегиба.

Теорема 6. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in (a, b)$, то график функции вогнутый.

Теорема 7 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть в точке x_0 $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в следующей последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить четность и нечетность функции.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.
8. На основании проведенных исследований построить график функции.

Например: **найти промежутки монотонности функции** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2) Найдем стационарные точки:

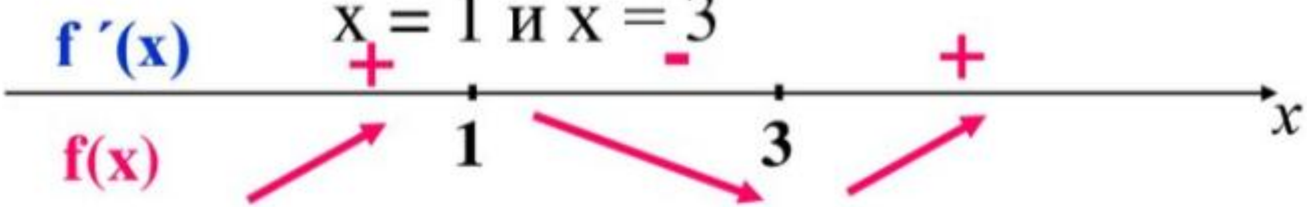
$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)

4)



5) $\mathbf{f'(x) > 0}$, при $\mathbf{x \in (-\infty; 1)}$ **и** $\mathbf{(3; +\infty)}$

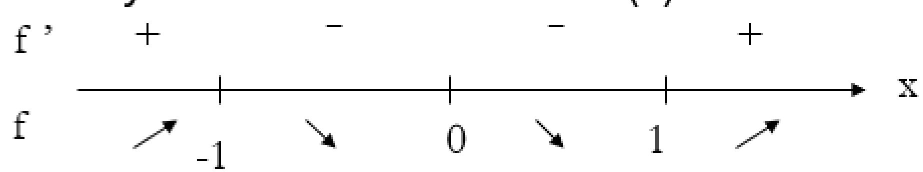
$\mathbf{f'(x) < 0}$, при $\mathbf{x \in (1; 3)}$

Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает

Пример: Исследовать функцию $y=f(x)= 3x^5 – 5x^3 + 2$ и построить ее график.

Решение:

1. D(y)=R
2. Функция ни четная, ни нечетная
3. Точки пересечения с осями: график f(x) пересекается с осью ординат в точке (0; 2). Найдем точки пересечения с осью абсцисс, для этого решим уравнение $3x^5 – 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого (x=1) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс находить не будем.
4. Промежутки монотонности: $f'(x) = 15x^4 – 15x^2 = 15x^2(x^2-1)$



5. Точки экстремума и значение функции в этих точках:

$x_{max}= -1$ $x_{min} = 1$ $f(-1) = 4$ $f(1) = 0$

6. Построить график